4. Энергия монохроматической волны

Волновое движение сопровождается изменением энергии среды, в которой распространяется волна. Изменение энергии среды при распространении в ней волны при некоторых дополнительных условиях может быть связано с существованием энергии волны. Для ее определения найдем изменение энергии среды, полагая, что амплитуда волны достаточно мала, чтобы воспользоваться линейной теорией.

Энергия выделенного элементарного объема среды V_0 определяется как сумма внутренней энергии вещества в этом объеме и кинетической энергии его движения. Представим скорость частиц среды в виде суммы $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$. Невозмущенное движение среды задано постоянной скоростью $\vec{V}$ в каждой точке пространства, а поле возмущения скорости $\vec{u}$ носит волновой характер, причем $u << V$. Плотность и давление невозмущенной среды ρ_0 и P_0 также будем считать постоянными во всех точках, а возмущения малыми, так что $p = p_0 + p_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где $p_1 << p_0$, $\rho_1 << \rho_0$.

Если e – массовая плотность внутренней энергии среды (энергия единицы массы), то внутренняя энергия рассматриваемого объема $E = e\rho V_0$. Соответственно, кинетическая энергия этого объема $E_{\text{кин}} = \rho\left(\vec{V} + \vec{u}\right)^2 V_0 / 2$. Подставляя сюда значения плотности и скорости возмущенного движения среды, с точностью до квадратичных по возмущению членов получим выражение для изменения объемной плотности кинетической энергии:

$$\Delta E = \frac{\rho_0 u^2}{2} + \left(\rho_0 + \rho_1\right)\left(\vec{V}\vec{u}\right).$$

Для вычисления изменения внутренней энергии возмущенной среды воспользуемся первым началом термодинамики, полагая, что рассматриваемые процессы являются изэнтропическими $\Delta S = 0$. При этом теплообменом с соседними элементарными объемами можно пренебречь. Изменение внутренней энергии заданной массы m в этих условиях определяется только работой сил давления:

$$d\mathsf{E} = m\,de = -p\,dV$$

Учитывая, что $V = m/\rho$, получаем соотношение для массовой плотности внутренней энергии в адиабатическом изэнтропическом процессе:

$$de = \frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

Изменение внутренней энергии элементарного объема V_0 определяется выражением:

$$dE = V_0 d(\rho e) = V_0(e\,d\rho + \rho\,de) = V_0(e + \frac{p}{\rho})d\rho.$$

Изменение объемной плотности внутренней энергии с точностью до членов второго порядка имеет вид:

$$\Delta(\rho e) = \frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho}\rho_1 + \frac{\partial^2(\rho e)}{\partial\rho^2}\cdot\frac{\rho_1^2}{2} + o(\rho_1^2).$$

Коэффициенты разложения в ряд легко вычисляются

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho} = \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0}\right)$$

$$\frac{\partial^2(\rho e)}{\partial\rho^2} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = \left(\frac{\partial e}{\partial\rho}\right)_s - \frac{p}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho_0}$$

где с –скорость звука, что дает выражение для изменения объемной плотности внутренней энергии:

$$\Delta(\rho e) = \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0}\right)\rho_1 + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho_1^2 .$$

Первое слагаемое описывает изменение внутренней энергии выделенного объема при изменении количества вещества в нем. В частности, при распространении монохроматической волны в достаточно большом объеме вклад от этого члена осциллирует, что нарушает принцип аддитивности для внутренней энергии. Таким образом, аддитивная часть, среднее (по времени) значение которой отлично от нуля, описывается только вторым слагаемым, что и позволяет связать эту часть внутренней энергии с волновым движением. Аналогичным требованиям не удовлетворяет часть кинетической энергии, линейная по возмущению среды.

Таким образом, объемная плотность полной энергией волнового движения, удовлетворяющая принципу аддитивности, пропорциональна квадратичным членам по возмущению и дается выражением:

$$\Delta E = E_{волн} = \frac{\varrho_0 u^2}{2} + \varrho_1\left(\vec{V}\vec{u}\right) + \frac{c^2}{2\varrho_0}\varrho_1^2$$

При распространении в среде плоской монохроматической волны под углом ϑ к вектору скорости потока возмущение плотности и скорости имеет вид:

$$\rho_1(\vec{r},t) = \rho\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right), \qquad \vec{u}(\vec{r},t) = c\cdot\frac{c\vec{k}}{\omega - ck\beta\cos\vartheta}\cdot\frac{\rho_1(\vec{r},t)}{\rho_0},$$

где $\beta = V/c$. Подставляя эти выражения, получим плотность энергии монохроматической плоской волны.

Если скорость потока мала ($\beta < 1$), то объемная плотность энергии волны имеет вид:

$$E^{+}_{волн} = \frac{c^2}{\varrho_0}\left(1 + \beta\cos\quad\right)\varrho_1^2 .$$

Как следует из приведенного выражения, эта величина положительна для всех волн, распространяющихся в любом направлении по отношению к невозмущенному потоку.

Если же скорость невозмущенного потока превышает скорость звука ($\beta > 1$), то возможно существование двух типов волн, быстрой и медленной, частоты которых совпадают, а скорость распространения различна.

Энергия этих волн определяется выражением:

$$E^{\pm} = \frac{c^2}{\varrho_0}\left(1 \pm \beta\cos\quad\right)\varrho_1^2 .$$

Если энергия быстрой волны всегда положительна, то распространение медленной волны внутри конуса Маха приводит к уменьшению полной энергии среды, так как энергия медленных волн отрицательна. Уменьшение энергии среды при возникновении медленной волны свидетельствует о неустойчивости системы относительно генерации волновых возмущений, при которых энергия потока будет переходить в энергию волны.

Теорема Пойнтинга утверждает, что изменение энергии сплошной среды в данном объеме в отсутствие объемных сил обусловлено потоками энергии через границу. Для определения вектора плотности потока энергии для волнового движения удобно воспользоваться уравнениями непрерывности и Эйлера для малых возмущений. Для упрощения вычислений ограничимся случаем изотропной среды, положив скорость потока равной нулю.

Умножая уравнение Эйлера на скорость частиц в данной точке, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2}{2} = -\frac{c^2}{\varrho_0}u_k\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_k} . \qquad (1)$$

Последнее слагаемое удобно представить в виде суммы и заменить второе слагаемое с помощью уравнения непрерывности.

$$u_k \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_k} = \frac{\partial(\varrho_1 u_k)}{\partial x_k} - \varrho_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial(\varrho_1 u_k)}{\partial x_k} + \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} \qquad (2)$$

Подстановка этого выражения в (1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varrho_0 u^2}{2} + \frac{c^2 \varrho_1^2}{2\varrho_0}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{c^2 \varrho_1 u_k\right\}.$$

Учитывая выражение для объемной плотности волны, полученное выше, это уравнение можно рассматривать как следствие теоремы Пойнтинга применительно к волновому движению среды:

$$\frac{\partial E_{волн}}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{S},$$

где $\vec{S} = c^2 \varrho_1 \vec{u}$ - вектор потока объемной плотности энергии, а $E_{волн} = \frac{\varrho_0 u^2}{2} + \frac{c^2}{2\varrho_0}\varrho_1^2$.

Отметим, что перенос энергии волной сопровождается переносом импульса, поток которого нетрудно определить аналогичным образом.

5. Сильные волны

В предыдущих разделах при изучении волнового движения мы ограничивались приближением слабых волн, что позволяло линеаризовать уравнения. Рассмотрим теперь сильные возмущения, не допускающие линеаризации уравнений движения.

Модель среды

В дальнейшем будем предполагать, что зависимость давления от плотности (и скорости) может быть установлена в рамках классической термодинамики. Будем считать движение изэнтропийным и адиабатическим.

Для упрощения анализа положим, что все характеристики волнового движения среды – плотность, скорость, давление и т. д. являются дифференцируемыми функциями координат и времени. Тогда в основных уравнениях можно перейти к дифференциальной форме. Уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

Ограничимся случаем идеальной изотропной среды, пренебрегая вязкостью. Динамическое уравнение Эйлера в этой модели

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Ограничимся моделью идеального газа, для которого зависимость давления от плотности определяется адиабатой Пуассона

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma.$$

Одномерная волна

Исследование свойств модели удобно начать с простейшего случая одномерного волнового движения.

Предположим, что в безграничной среде могут существовать волны, зависящие только от одной координаты, например от *x*. В этом случае все характеристики волнового движения среды – плотность, скорость, давление и т. д. могут зависеть только от этой координаты и времени.

Уравнения движения при таком предположении упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial x}=0$$

С учетом уравнения непрерывности последние два уравнения системы принимают форму характеристических:

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}=0$$

Это означает, что на траекториях частиц y и z – компоненты вектора скорости остаются постоянными. Таким образом, рассматриваемая модель допускает существование только продольных волн

$$u_i=\{u,\ 0,\ 0\},$$

которые описываются системой

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Решения Римана

Поскольку нас интересуют волновые решения, естественно предположить, что скорость, плотность и давление среды зависят от одной комбинации координаты и времени. Это позволяет искать, например, скорость и давление как функции плотности $u=u(\rho)$, $p=p(\rho)$.

Тогда частные производные скорости можно выразить через производные плотности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u'\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=u'\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Здесь штрихом обозначена производная скорости по плотности.

Заданная зависимость давления от плотности также позволяет связать производную давления по координате с производной плотности по координате:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=c^2(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

где

$$c^2(\rho)=\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_s=\gamma\,p(\rho)/\rho.$$

Производная в рассматриваемой модели вычисляется при постоянной энтропии.

С учетом сделанных предположений уравнение непрерывности и уравнение Эйлера приводятся к виду:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u+\rho u')\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}=0 \qquad u'\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(uu'+c^2/\rho\right)\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}=0.$$

Эти уравнения можно рассматривать как систему для определения неизвестной функции

$$\rho=\rho(t,x).$$

Условие существования нетривиального решения – обращение в нуль определителя:

$$\left(uu' + c^2/\rho\right) - u' \cdot \left(u + \rho u'\right) = 0 .$$

Отсюда следует, что скорость должна удовлетворять условию:

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} .$$

Решение этого дифференциального уравнения определяет связь между скоростью и плотностью среды

$$u(\rho) = \pm \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho + const .$$

Уравнение непрерывности теперь может быть записано в форме характеристического уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \pm c) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 .$$

Соотношения между скоростью и плотностью, записанные в форме

$$u \mp \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = const$$

и выполняющиеся на характеристиках

$$V_{\pm} = u \pm c$$

называются ***инвариантами Римана.***

Решение уравнения для плотности, следовательно, может быть представлено в форме:

$$\rho_{\pm} = \Phi\left(x \mp V(\rho) \cdot t\right)$$

Для принятых условий деформаций элементарного объема идеального газа зависимость характеристической скорости, например, V_+ от плотности выражается простым соотношением:

$$V_+ = c_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\rho/\rho_0\right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} ,$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{p_0}{\rho_0}}$.

Отметим основные свойства волны в данной модели:

1. Уравнения газовой динамики допускают существование волновых решений в виде продольных волн. Так как волновые уравнения существенно нелинейны, то скорость распространения волны, заданной в начальный момент дифференцируемой функцией, зависит от величины начального возмущения в данной точке пространства и увеличивается с ростом возмущения.
2. Любое возмущение, описываемое в начальный момент дифференцируемой функцией, спустя некоторое время становится разрывным. Волновое решение, описываемое разрывным решением, называется ударной волной. Время формирования разрывного решения определяется как формой, так и величиной начального возмущения.
3. Распространение ударной волны не может быть описано системой дифференциальных уравнений. Для описания движения ударной волны следует воспользоваться теоремами динамики в интегральной форме.