2. Малые возмущения в газах

Рассмотрим распространение малых возмущений в среде. Пусть равновесное состояние среды описывается параметрами p_0, ρ_0, V , а отклонения от этих значений в каждой точке пространства в любой момент времени (возмущения) малы и описываются дифференцируемыми функциями p, ρ, u :

$$\widehat{p} = p_0 + p, \quad \widehat{\rho} = \rho_0 + \rho, \quad v_k = V_k + u_k .$$

Уравнение непрерывности и уравнение Эйлера для сплошной среды

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\rho} v_k)}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial (\widehat{\rho} v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\rho} v_i v_k)}{\partial x_k} = 0$$

при подстановке в них выражений для плотности и скорости дают в линейном приближении по возмущениям следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\rho V_k)}{\partial x_k} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_0 V_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 .$$

Для рассматриваемых баротропных процессов давление среды определяется лишь ее плотностью в данной точке пространства, так что уравнения движения дополняются зависимостью

$$\widehat{p} = \widehat{p}(\widehat{\rho}) .$$

Обычно при описании распростанении звуковых волн предполагается, что термодинамические процессы в элементарном объеме среды являются квазиравновесными и происходят без изменения числа частиц в данном объеме и без теплообмена. В этом случае можно использовать модель адиабатических процессов, в которых зависимость давления от плотности дается соотоношением:

$$\widehat{p} = p_0 (\widehat{\rho}/\rho_0)^{\gamma} ,$$

где $\gamma = c_p / c_v$ - отношение теплоемкостей при изобарном и изохорном процессах.

Выполняя дифференцирование по координатам и вводя обозначение

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c^2 ,$$

получим систему дифференциальных уравнений для возмущений плотности и скорости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + V_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_0 V_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0$$

Часто для решения системы используется метод исключения одной из переменных, например, возмущения скорости. Получившееся при этом уравнение для возмущения плотности среды будет уравнением второго порядка:

$$\frac{{}^{2}\varrho}{t^{2}} + 2V_k \frac{{}^{2}\varrho}{x_k \ t} - c^2 \frac{{}^{2}\varrho}{x_k \ x_k} + V_k V_m \frac{{}^{2}\varrho}{x_k \ x_m} = 0 .$$

Будем искать решение линейной однородной системы в виде суперпозиции плоских монохроматических волн плотности и скорости. Воспользуемся для этого представлением решения в виде интеграла Фурье

$$\rho(x_k, t) = \int \tilde{\rho}(k_k) \exp\{i\omega t - i k_s x_s\} d^3 k$$

$$u_i(x_k, t) = \int \tilde{u}_i(k_k) \exp\{i\omega t - i k_s x_s\} d^3 k$$

Подставляя эти решения в уравнения и проводя дифференцирование, получим для трансформант Фурье систему алгебраических уравнений:

$$(\omega - V_k k_k)\tilde{\rho} - \rho_0 k_k \tilde{u}_k = 0$$

$$-c^2 k_i \tilde{\rho} + \rho_0 (\omega - V_k k_k)\tilde{u}_i = 0 .$$

Система будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель обращается в ноль, что позволяет определить значения частоты ω, при которой существуют волновые решения. Дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между волновым вектором и частотой, удобно получить, если умножить второе уравнение на k_i и рассматривать нетривиальные решения системы относительно величин $\tilde{\rho}$ и $\tilde{z} = (k_i \tilde{u}_i)$. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид:

$$(\omega - V_k k_k)^2 = c^2 k^2$$

Вводя угол θ между вектором скорости невозмущенной среды и волновым вектором (направлением распространения волны), приведем уравнение к виду

$$(\omega - Vk\cos\vartheta)^2 = c^2 k^2 .$$

Решение полученного уравнения имеет вид:

$$\omega = \omega_0 (1 + V\cos\vartheta / c),$$

где введено обозначение $\omega_0 = ck$.

Решение с $\omega > 0$ существует для любых направлений волнового вектора, если скорость движения невозмущенной среды V меньше фазовой скорости распространения волны в изотропной среде c.

Величина фазовой скорости монохроматической волны зависит от скорости среды и V и направления распространения волны

$$V_{ph} = \frac{\omega}{k} = c + V\cos\vartheta .$$

Волна подвергается "сносу" потоком, движущимся со скоростью V.

Из уравнения непрерывности для возмущений следует, что вектор скорости возмущения u_i направлен вдоль волнового вектора

В том случае, когда скорость невозмущенного потока V превосходит скорость звука (в неподвижной среде) $V > c$, распространение волны ограничено углами, при которых выполняется неравенство $c + V\cos\vartheta > 0$. Волны, волновой вектор которых составляет угол $.\vartheta$. с направлением вектора скорости среды V, имеют фазовую скорость, равную нулю, т.е. поверхность постоянной фазы плоской волны любой частоты не перемещается в пространстве (относительно выбранной системы отсчета). Волновой фронт такой волны составляет с вектором скорости потока угол φ, такой что $\sin\varphi = c/V$. Этот угол называется углом Маха. Если возмущение среды вызвано неподвижным источником, находящимся в некоторой точке среды, например, в начале координат, то волны, создаваемые таким источником, распространяются внутри конуса, вершина которого совпадает с точечным источником, а угол при вершине равен 2 φ. Этот конус называется конусом Маха. Распространение волновых возмущений вне конуса навстречу набегающему потоку невозможно.

3. Излучение источника в движущейся среде

Для более подробного анализа возмущений среды, создаваемых точечным источником, рассмотрим решение системы уравнений, исключив из нее одну из неизвестных, например, скорость. При этом удобно перейти к волновому уравнению второго порядка. Наличие точечного источника возмущения плотности описывается введением δ-функции в правой части уравнения.

Пусть среда, в которой находится источник, движется со скоростью V в положительном направлении оси OX. Размеры источника будем считать пренебрежимо малыми, а его воздействие на среду – периодическим. В этом случае волновое уравнение будет неоднородным. Пусть возмущение среды описывается скалярной функцией φ:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2V\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z} - \left(c^2 - V^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right\}\varphi = 4\pi q c^2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\cos\mathbf{\Omega}t.$$

Решение уравнения удобно проводить с помощью разложения Фурье по плоским волнам:

$$\varphi(\vec{r},t) = \int d\vec{k}\,\tilde{\varphi}\left(\vec{k},t\right)e^{i\vec{k}\vec{r}}, \qquad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk_x e^{ik_x x},$$

что дает для временной зависимости фурье-компоненты уравнение вынужденных колебаний вида

$$\ddot{\tilde{\varphi}} - 2iVk_z\dot{\tilde{\varphi}} + c^2\left(1-\beta^2\right)k_z^2\tilde{\varphi} + c^2k_\perp^2\tilde{\varphi} = F(t), \tag{1}$$

с правой частью

$$F(t) = \frac{4\pi q c^2}{(2\pi)^3}\cos\Omega t.$$

Решение уравнения вынужденных колебаний мы будем проводить с помощью функции Грина, что позволяет в явном виде учесть условие причинности. Будем искать это решение в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')F(t')dt'. \tag{2}$$

Интегрирование по времени формально можно вести до $t \to \infty$, если положить, что функция Грина имеет вид:

$$G(t-t') = \begin{cases} G(t-t') & t' < t \\ 0 & t' > t \end{cases}.$$

Такое представление функции Грина соответствует обычному представлению о последовательности причинно-следственных связях, когда динамическая переменная не может зависеть от будущего воздействия на систему.

Подставляя решение (2) в уравнение (1), для функции Грина получим уравнение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ddot{G}(t-t') - 2iVk_z\dot{G}(t-t') + c^2\left[\left(1-\beta^2\right)k_z^2 + c^2k_\perp^2\right]G(t-t')\right\} F(t')dt' = F(t), \qquad (3)$$

откуда следует, что выражение в фигурных скобках является δ-функцией:

$$\ddot{G}(t-t') - 2iVk_z\dot{G}(t-t') + c^2\left[\left(1-\beta^2\right)k_z^2 + c^2k_\perp^2\right]G(t-t') = \delta(t-t'). \qquad (4)$$

Фурье-образ для функции Грина $\tilde{G}(\omega)$, который мы определим выражением

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega$$

формально выражается дробью

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-\omega^2 - 2\beta ck_z\omega + \left[\left(1-\beta^2\right)c^2k_z^2 + c^2k_\perp^2\right]},$$

знаменатель которой обращается в нуль в точках $\omega_{1,2} = -\beta ck_z \mp ck$, где $k = \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2}$ - волновое число. Для определения функции Грина $G(t-t')$ следует вычислить интеграл, что удобно сделать с помощью теории вычетов. При этом можно так выбрать контур интегрирования, что условие причинности будет выполнено автоматически. Для этого достаточно обойти полюса сверху в комплексной плоскости ω или, что тоже самое, сместить оба полюса вниз с действительной оси на малую величину $\varepsilon > 0$, которую после вычисления интеграла следует устремить к нулю.

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-t')}d\omega}{-\omega^2 - 2\beta ck_z\omega + \left[\left(1-\beta^2\right)c^2k_z^2 + c^2k_\perp^2\right] - i\varepsilon\omega}.$$

Вычисляя интеграл при $t - t' < 0$ по контуру, который замыкается в верхней полуплоскости, мы получим нуль, так как внутри контура полюсов нет. При $t - t' > 0$ контур следует замыкать в нижней полуплоскости, где расположены полюса. Это приводит к следующему выражению:

$$G(t-t') = -\vartheta(t-t')e^{i\beta ck_z(t-t')}\frac{\sin ck(t-t')}{ck}.$$

Зависимость от времени фурье-компоненты плоской волны имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{4\pi qc}{(2\pi)^3} e^{i\beta ck_z t} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t-t') e^{-i\beta ck_z t'} \frac{\sin ck(t-t')}{ck} \cos\Omega t' dt'$$

Теперь нетрудно получить выражение для пространственного распределения поля, создаваемого точечным источником:

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi qc}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ \ (t-t') \cos\boldsymbol{\Omega} t' \int d\vec{k} e^{ik_z\beta c(t-t')} \frac{\sin ck(t-t')}{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Внутренний интеграл представим в виде:

$$I = \int d\vec{k} e^{i\{k_x x + k_y y + k_z [z - \beta c(t-t')]\}} \frac{\sin ck(t-t')}{k} = \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{\sin ck(t-t')}{k}$$, где $\vec{R} = (x,\ y,\ z\text{-}V(t-t'))$.

Для выполнения интегрирования выберем сферическую систему так, чтобы полярный угол ϑ отсчитывался от вектора $\vec{R}$. Тогда

$$I = \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{\sin ck(t-t')}{k} = 2\pi \int_0^{\infty} k^2 dk \frac{\sin(ck\tau)}{k} \int_0^{\pi} e^{ikR\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} kdk \sin(ck\tau) \int_{-1}^{1} dq e^{ikRq} =$$

$$= \frac{2\pi}{R} \int_0^{\infty} kdk \sin(ck\tau) \sin(kR) = \frac{\pi}{2R} \{\delta(c\tau - R) + \delta(c\tau + R)\}.$$

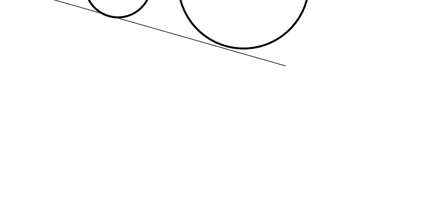
Для запаздывающей функции $\tau = t - t' > 0$, $R > 0$, так что $I = \dfrac{\pi}{2R}\delta(c\tau - R)$ и

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi R} \cos\boldsymbol{\Omega} t^{ret}.$$

Фаза зависит от запаздывающего времени, обусловленное конечным временем распространения возмущения.

$$t^{ret} = t - \frac{r}{c} \cdot \frac{\beta\cos\vartheta + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\vartheta}}{1 - \beta^2}.$$

Поверхности равной фазы, определяющие волновой фронт в некоторый момент времени, изображены на рисунке.



При движении потока со скоростью, превышающей скорость звука (в неподвижном газе), область возмущения имеет вид конуса, угол раствора которого называется углом Маха и определяется выражением: $\sin\theta = \dfrac{c}{V}$.

Рис.