# Раздел II. Течение идеальной жидкости.

## 1. Равновесие несжимаемой жидкости

В покоящейся жидкости $v_i = 0$ и уравнение Эйлера и описывает условия равновесия:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i .$$

Рассмотрим простейшие примеры решения этого уравнения.

а) Несжимаемая жидкость $\rho = const$ покоится в однородном поле тяжести $f_i = g_i$. Определить давление в жидкости.

В системе координат OXYZ, в которой ось OZ направлена вертикально вниз $g_i = \{0,\ 0,\ g\}$, уравнения Эйлера имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g .$$

Решение системы тривиально и имеет вид:

$$p(x, y, z) = p_0 + \rho g z .$$

б) Определить равновесную форму поверхности жидкости, вращающейся как твердое тело с угловой скоростью $\omega$ и давление внутри жидкости. Определить силу, действующую на небольшое тело, вращающееся вместе с жидкостью.

Для определения равновесия жидкости, вращающейся в однородном поле тяжести, воспользуемся уравнением Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 + 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}] = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \vec{g} .$$

Мы рассматриваем стационарное течение, поэтому $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$. Распределение скоростей течения жидкости – твердотельное $\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, ускорение свободного падения постоянно - $\vec{g} = \vec{\nabla}(\vec{g} \cdot \vec{r})$ и плотность жидкости постоянна $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)$.

При твердотельном вращении

$$[\vec{\omega} \cdot \vec{v}] = [\vec{\omega}[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 ,$$

$$\vec{\nabla} v^2 = \vec{\nabla}[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]^2 = \vec{\nabla}\left(r^2\omega^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2\right) = 2\left\{\vec{r}\omega^2 - \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\right\},$$

и уравнение Эйлера можно привести к виду:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} + (\vec{g} \cdot \vec{r})\right) = 0 .$$

Выберем систему координат так, чтобы поверхность жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси *OZ* проходила через начало координат, так что давление в этой точке равно атмосферному: $p(0) = p_0$. Интегрирование уравнения Эйлера при таком условии дает:

$$p(x, y, z) = p_0 + \frac{\rho v^2(x, y, z)}{2} - \rho g z ,$$

или, учитывая зависимость величины скорости от координат:

$$p(x, y, z) = p_0 + \frac{\rho \omega^2 (x^2 + y^2)}{2} - \rho g z .$$

Для определение выталкивающей силы т. е. суммы поверхностных сил, действующих на тело, необходимо вычислить интеграл:

$$\vec{F} = -\oint_S p d\vec{\sigma}.$$

Преобразуя поверхностный интеграл к объемному и выполняя интегрирование (по теореме о среднем), для малого объема получим:

$$\vec{F}(x,y,z) = -\int_V \vec{\nabla} p du = \begin{cases} -\rho V \omega^2 x \\ -\rho V \omega^2 y \\ \rho V g \end{cases}.$$

## 2. Стационарное обтекание тела

Рассмотрим безвихревое стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости, при котором $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v} \equiv 0$ во всем пространстве. Такое движение можно описать единственной скалярной функцией - потенциалом скорости течения жидкости, определяющей поле скоростей: $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Система уравнений содержит два уравнения - непрерывности и Эйлера, которые при сделанных предположениях в отсутствие объемных сил имеют вид:

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) = 0.$$

Интеграл уравнения Эйлера (интеграл Бернулли) позволяет определить давление в жидкости по заданному распределению скоростей

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = const$$

Таким образом, при сделанных предположениях для полного решения задачи достаточно лишь уравнения непрерывности

$$\Delta\varphi = 0,$$

которое необходимо дополнить граничными условиями.

Рассмотрим два примера течения несжимаемой жидкости.

***1) Обтекание шара стационарным потоком***

Пусть поток жидкости движется с постоянной скоростью вдоль оси OZ. Потенциал поля скоростей невозмущенного потока (в отсутствие шара) определим выражением:

$$\varphi_0(\vec{r}) = (\vec{V}\vec{r}) = Vr\cos\vartheta.$$

Если в жидкости находится шар радиуса *a*, центр которого совпадает с началом координат, то он возмущает поток жидкости. Будем считать возмущенный поток установившимся и безвихревым. В этом случае потенциал поля скоростей может быть представлен в виде суммы:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_1(\vec{r}),$$

где $\varphi_1(\vec{r})$ - потенциал возмущения, создаваемого шаром. Потенциал возмущения скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_1 = 0.$$

Предположим, что возмущение потенциала скорости шаром пренебрежимо мало на больших расстояниях, так что $\varphi_1(\vec{r}) \to 0$ при $r >> a$. Поверхность шара будем считать непроницаемой для жидкости, так что радиальная компонента скорости на поверхности шара обращается в нуль.

Это приводит ко второму граничному условию

$$\left.\frac{\partial \varphi_1(\vec{r})}{\partial r}\right|_{r=a} = -\left.\frac{\partial \varphi_0(\vec{r})}{\partial r}\right|_{r=a} = -V\cos\vartheta \; .$$

Предполагая, что возмущенное течение жидкости также как и движение невозмущенного потока является аксиально-симметричным, для потенциала возмущения получим уравнение (в сферических координатах)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta}\right) = 0 \; .$$

Решение уравнения методом разделения переменных

$$\varphi_1(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$$

приводит к следующему уравнению для угловой части:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) = -C\Theta \; ,$$

где С - константа разделения переменных.

Решение будет регулярным при $C = n(n+1)$ и удовлетворять граничному условию на поверхности шара при $n = 1$:

$$\Theta(\vartheta) = \cos\vartheta \; .$$

Соответственно, радиальное уравнение для возмущения имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - 2R = 0 \; ,$$

и его решение может быть получено подстановкой $R = Ar^s$. Решение уравнения, удовлетворяющее условию убывания возмущения на бесконечности, существует при $s = -2$. Таким образом, возмущение потенциала, создаваемое непроницаемым шаром заданного радиуса имеет вид:

$$\varphi_1(r,\vartheta) = Ar^{-2}\cos\vartheta \; ,$$

а константа $A$ определяется из условия на поверхности шара

$$\left.\frac{\partial \varphi_1(\vec{r})}{\partial r}\right|_{r=a} = -2Aa^{-3}\cos\vartheta = -V\cos\vartheta$$

и равна $A = Va^3/2$. Отсюда окончательно получаем выражения для потенциала возмущения жидкости

$$\varphi_1(r,\vartheta) = \frac{Va}{2}(a/r)^2\cos\vartheta \; ,$$

а также поле возмущения вектора скорости (в сферических координатах)

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi_1(r,\vartheta) = -V(a/r)^3\{\cos\vartheta,\ \sin\vartheta/2,\ 0\} .$$

Это позволяет определить распределение давления на поверхности шара

$$p|_R = p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\vartheta\right) ,$$

где $p_0$ – давление в невозмущенном потоке.

Так как распределение давления симметрично относительно экваториальной плоскости $\vartheta = \pi/2$, то суммарное силовое воздействие потока идеальной несжимаемой жидкости вдоль направления движения оказывается равным нулю. То есть, воздействие движущейся жидкости на неподвижный шар (или воздействие жидкости на шар, движущейся в ней) равно нулю. Этот результат формально можно получить, вычисляя воздействие потока на элементарную площадку $d\sigma$ на поверхности сферы. В силу аксиальной симметрии потока жидкости сила, действующая на сферу, может быть направлена только вдоль оси $OZ$ :

$$dF_z = -p\big|_R(\vartheta)\cos\vartheta d\sigma.$$

Выполняя интегрирование по всей поверхности сферы, получим

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^\pi p\big|_R(\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = 0.$$

Этот эффект называется ***парадоксом Даламбера***.

В системе отсчета, где жидкость покоится, шар движется с постоянной скоростью. Интерпретация парадокса Даламбера в этой системе сводится к утверждению, что идеальная несжимаемая жидкость (при потенциальном обтекании) не оказывает сопротивления движущемуся шару.

**Присоединенная масса**

Возмущение потока жидкости шаром изменяет (увеличивает) кинетическую энергию этого потока. Эффект увеличения кинетической энергии потока при обтекании им неподвижного шара легко рассчитывается с помощью полученных выражений для вектора скорости $\vec{u}$. Для этого следует учесть, что полная скорость $\vec{v}$ в любой точке возмущенного потока определяется суммой $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$, и определить изменение кинетической энергии, вызванное присутствием шара. Однако в большинстве случаев интерпретация этого явления связывается с изменениями, которые вызывает в жидкости движущееся тело (в данном случае шар). Рассмотрим такую постановку задачи. Пусть в начальный момент времени в выбранной системе отсчета жидкость покоится. Предположим, что в этой жидкости находится непроницаемый шар массой *M*, который начинает движение с нулевой начальной скоростью под действием постоянной силы. Спустя некоторое время шар будет двигаться относительно жидкости с заданной скоростью *V*. Предполагая, что обтекание шара в любой момент является потенциальным, применим к этой задаче полученные выше результаты.

Для определения скорости шара можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии системы шар + жидкость:

$$\Delta T_{sys} = \Delta\left(\frac{MV^2}{2} + T_{hydr}\right) = A,$$

где *A* – работа приложенной силы, а $T_{hydr}$ – кинетическая энергия возмущения жидкости. Если в рассматриваемый момент центр движущегося шара совпадает с началом (неподвижной) системы отсчета, то распределение скоростей жидкости, обтекающей этот шар дается выражением для $\vec{u}$ :

$$\vec{u} = -V(a/r)^3\{\cos\vartheta, \sin\vartheta/2, 0\},$$

а плотность кинетической энергии возмущенной жидкости -:

$$\tau = \frac{\rho u^2}{2} = \frac{\rho V^2}{2}(a/r)^6\left\{\cos^2\vartheta + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta\right\}.$$

Интегрируя это выражение по всему объему, получим кинетическую энергию возмущения:

$$T_{hydr} = \frac{\rho V^2}{2} 2\pi\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta\left\{\cos^2\vartheta + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta\right\}\int_a^\infty r^2 dr(a/r)^6.$$

Выполняя интегрирование, получим окончательно:

$$T_{hydr} = \frac{\rho V^2}{2}\frac{2\pi a^3}{3} = \frac{mV^2}{2},$$

где введено обозначение $m = \rho\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Поскольку энергия возмущения в жидкости определяется лишь скоростью движения шара, а масса жидкости, вовлеченной в движение, не зависит от его скорости, суммарная энергия системы оказывается пропорциональной кинетической энергии движущегося шара. Учет энергии жидкости, приведенной в движение, можно произвести, добавляя к массе движущегося шара «присоединенную» массу $m$. Таким образом, кинетическая энергия системы шар + жидкость выражается введением присоединенной массы: $M' = M + m$ . Теорема об изменении энергии системы позволяет получить эффективное динамическое уравнение движения шара в жидкости:

$$M\ddot{\vec{r}} = \vec{F} ,$$

вид которого совпадает с уравнение Ньютона, но которое описывает движение системы шар + жидкость.

***2) Обтекание цилиндра стационарным потоком с циркуляцией***

Предположение об аксиальной симметрии обтекающего потока в ряде случаев не выполняется. Это может являться следствием как асимметрии обтекаемых тел, так и изменения граничных условий. Рассмотрим простейшую модель – обтекание непроницаемого цилиндра радиуса $a$, расположенного перпендикулярно потоку идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что всюду в области, занятой жидкостью, движение потенциально, т. е. распределение скоростей описывается потенциалом скорости $\varphi$, удовлетворяющим уравнению Лапласа в цилиндрических координатах $r, \vartheta$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}=0$$

с условием непроницаемости

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_a=0.$$

Будем как и ранее считать, что возмущение потока жидкости, вносимое цилиндром, убывает на бесконечности, что дает асимптотическое поведение потенциала скорости

$$\left.\varphi\right|_{r\to\infty}=V_\infty r\cos\vartheta.$$

Регулярное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее сделанным предположениям, может быть получено методом разделения переменных и имеет вид:

$$\varphi_0=V_\infty\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Учесть асимметрию обтекания можно путем добавления к потенциалу симметричного распределения скоростей $\varphi_0$ потенциала циркуляции $\varphi_1=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\vartheta$:

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1=V_\infty\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\vartheta+\frac{\Gamma}{2\pi}\vartheta.$$

Это приводит к асимметричному относительно горизонтальной диаметральной плоскости цилиндра распределению скоростей потока:

$$v_r=V_\infty\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\vartheta,\qquad v_\vartheta=-V_\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\vartheta+\frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Такое поле скоростей является всюду безвихревым, кроме точки $r=0$. Однако циркуляция вектора скорости по контуру $C_1$, охватывающему цилиндр, отлична от нуля:

$$\oint_{C_1}\vec{v}d\vec{r}=\Gamma.$$

Вычисляя с помощью интеграла Бернулли поле давлений, получаем

$$p(\vartheta)=p_0-\frac{\rho}{2}\left(\frac{\Gamma}{2\pi a}-2V_\infty\sin\vartheta\right)^2.$$

Отсюда определяется сила, действующая на единицу длины цилиндра, находящегося в потоке с циркуляцией, которая имеет следующие компоненты:

$$F_x=-\int_0^{2\pi}p(\vartheta)a\cos\vartheta d\vartheta=0,$$

$$F_y=-\int_0^{2\pi}p(\vartheta)a\sin\vartheta d\vartheta=-\rho V_\infty\Gamma.$$

Таким образом, поток идеальной несжимаемой жидкости действует на цилиндр с силой, перпендикулярной направлению скорости невозмущенного потока. Эта сила называется подъемной силой Жуковского.

## 3. Стационарное изэнтропийное течение газа

В рассмотренных примерах процессы сжатия сплошной среды были несущественными, что позволяло использовать модель несжимаемой идеальной жидкости. Рассмотрим теперь примеры, когда объемные деформации среды существенны. Будем называть такую сплошную среду газом. Ограничимся рассмотрением процессов, в которых вязкостью можно пренебречь. Для упрощения модели будем считать, что рассматриваемый нами газ является идеальным, т. е. уравнение состояния этого газа – уравнение Клапейрона – Менделеева, которое в переменных сплошной среды имеет вид:

$$p = r\rho T,$$

где $\rho = m/V$ - плотность газа, а $r = R/\mu$ .

Уравнение состояния дает зависимость давления от двух параметров – плотности и температуры и применимо для любых процессов. Если определить конкретный вид процесса, например изотермический или адиабатный, то одну из переменных удается исключить. Таким образом, учет термодинамических свойств системы дает необходимую информацию для полного решения задач о движении газа.

Рассмотрим в качестве примера стационарное течение газа по трубе переменного сечения, медленно изменяющегося по направлению потока.

Будем считать, что сечение трубы задано как функция координаты $S = S(x)$, а поток газа является одномерным, т. е. его механические и термодинамические характеристики также являются функциями только одной координаты: $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $T = T(x)$, $u = u(x)$.

Заметим, что выбранная модель не свободна от внутренних противоречий, поскольку именно составляющая скорости потока, перпендикулярная оси трубы обеспечивает выполнение условия непрерывности. По этой причине мы запишем уравнение непрерывности в интегральной форме, учитывающей этот дефект модели.

$$\rho u S = const$$

Уравнение Эйлера в проекции на направление вдоль оси трубы имеет вид

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}.$$

В общем случае давление газа определяется его плотностью и температурой из термического уравнения состояния:

$$p = p(\rho, T)$$

Будем считать газ идеальным, а его движение баротропным $p = p(\rho)$. В этом случае правая часть уравнения Эйлера может быть представлена в виде

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}.$$

Производная плотности определяется из уравнения непрерывности:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = 0,$$

так что уравнение Эйлера сводится к виду

$$u\frac{du}{dx} = \frac{dp}{d\rho}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right),$$

что позволяет определить скорость и давление в каждом сечении трубы, если известна скорость $u = u_0$ в сечении $S = S_0$.

Рассмотрим более подробно адиабатический процесс, считая процессы обратимыми.

В этом случае для вычисления правой части уравнения Эйлера удобно обратиться к первому началу термодинамики:

$$\delta q = de + pdv = 0 .$$

Термическое уравнение (Клапейрона–Менделеева) дает соотношение $pdv + vdp = rdT$, которое вместе с калорическим уравнением $c_V = const$ определяет удельную внутреннюю энергию идеального газа $e = c_V T$ и с учетом соотношения Майера $c_p = c_V + r$ позволяет представить правую часть уравнения Эйлера в виде дифференциала:

$$u\frac{du}{dx} = -c_p \frac{dT}{dx} .$$

Это дает интеграл уравнения Эйлера:

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = const . \tag{4}$$

Величина $c_p T$ является удельной энтальпией идеального газа, введенной ранее:

$$c_p T = c_V T + rT = e + pv = w ,$$

так что полученный нами интеграл является интегралом Бернулли в отсутствие объемных сил:

$$\frac{u^2}{2} + w = const .$$

Из соотношения (4) следует, что температура в адиабатическом потоке газа уменьшается с ростом его скорости. В частности, если в некотором сечении трубы $S_0$, где скорость идеального газа пренебрежимо мала, температура равна $T_0$, то $T(u) = T_0 - u^2/2c_p$. Максимально возможная скорость течения газа по трубе в этом случае определяется сечением, где температура газа равна нулю

$$u_{\max} = \sqrt{2c_p T_0} .$$

Уравнение Эйлера и уравнение непрерывности позволяют определить зависимость скорости течения от площади поперечного сечения. Преобразуем правую часть уравнения Эйлера:

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s \frac{d\rho}{dx} = c^2\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right),$$

где введено обозначение $c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$. Эта величина имеет размерность скорости, и как будет показано в следующем разделе, является скоростью звука в газе в данном сечении. Отсюда получаем уравнение, связывающее скорость потока и сечение трубы:

$$\left(u^2 - c^2\right)\frac{du}{dx} = \frac{u}{S}\frac{dS}{dx} .$$

Оно называется уравнением Гюгонио́. Из него следует, что при $u < c$ $\frac{du}{dS} < 0$, т. е. при скорости движения потока в данном сечении, меньшем скорости звука, уменьшение сечения трубы приводит к росту скорости потока. При $u > c$ $\frac{du}{dS} > 0$ т. е. при скорости движения потока, превышающей скорость звука, увеличение сечения приводит к увеличению его скорости. Если скорость течения в некотором сечении $S = S_*$ равна местной скорости звука в потоке $u_* = c_*$, то такое сечение называется критическим.

Полученные результаты имеют большое прикладное значение для создания систем ускоряющих поток газа. При необходимости разогнать газ до большой скорости, превышающей скорость звука, сечение трубы должно вначале уменьшаться до критического, в котором скорость потока достигает местной скорости звука, а затем увеличиваться. Труба такого сечения называется соплом Лаваля и впервые была применена в паровой турбине.

Для адиабаты Пуассона $p(\rho) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$ скорость звука легко вычисляется:

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma r T .$$

Это соотношение позволяет выразить внутреннюю энергию и энтальпию идеального газа через скорость звука:

$$e = c_V T = \frac{1}{\gamma} \frac{c^2}{\gamma - 1}, \qquad w = c_p T = \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

Если скорость звука в покоящемся газе равна $c_0$ ($c_0^2 = \gamma r T_0$), то уравнение Бернулли

$$c_p T_0 = \frac{u^2}{2} + c_p T$$

позволяет определить скорость течения газа в критическом сечении

$$c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

и определить зависимость температуры от скорости потока:

$$T(u) = T_0 \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{c_0^2} \right).$$

Уравнение состояния и адиабата Пуассона позволяют вычислить зависимость от скорости плотности и давления идеального газа.

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \qquad p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{c_0^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Приведем также значения критических параметров потока:

$$T_* = T_0 \frac{2}{\gamma + 1}, \qquad p_* = p_0 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \qquad \rho_* = \rho_0 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

## 4. Разрывное течение газа в трубе постоянного сечения

В ряде случаев движение газа происходит так, что его характеристики (плотность, скорость, давление) являются разрывными функциями. Как показывает анализ, допустимо существование двух типов разрывов. Один из них не сопровождается переносом массы через поверхность разрыва. Такой разрыв называется тангенциальным. Другой тип разрыва сопровождается переносом вещества через границу разрыва. Такие разрывы называются ударными волнами, и мы рассмотрим сейчас простейшую модель этого явления.

Предположим, что движение происходит по трубе постоянного сечения вдоль оси $OX$ так, что при $x = 0$ имеется скачок характеристик.

Для описания разрывного течения уравнения движения в дифференциальной форме непригодны, поэтому мы будем использовать интегральные соотношения.

Закон сохранения массы в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(x_k) dv = -\oint_S \rho u_i d\sigma_i$$

применительно к рассматриваемому случаю стационарного движения по трубе постоянного сечения дает простое выражение:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 .$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены параметры газа до и после скачка в сечении $x = 0$.

Импульс газа в выделенном контрольном объеме изменяется за счет переноса импульса через контрольную поверхность и под действием поверхностных сил:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(x_k) u_i dv = -\oint_S \rho u_i u_k d\sigma_k + \oint_S \tau_{ik} d\sigma_k$$

Для рассматриваемого случая эта теорема принимает вид:

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$$

Несколько сложнее применение законов термодинамики для разрывного течения. Дело в том, что термодинамические характеристики газа введены только для равновесной системы, когда любой элементарный объем находится в состоянии термодинамического равновесия. При движении газа слева и справа от разрыва это безусловно верно. Однако, на самом скачке любой сколь угодно малый элементарный объем перестает удовлетворять нулевому началу термодинамики. Поэтому адиабатическое течение газа при прохождении через скачок параметров перестает быть изэнтропийным. Очевидно, что неравновесные процессы, которые происходят в выделенном элементарном объеме при прохождении скачка параметров, сопровождаются ростом энтропии. Следовательно, использование адиабаты Пуассона для установления соотношения между давлением и плотностью газа невозможно. Поэтому мы вернемся к основному постулату – первому началу термодинамики. Однако, применение первого начала требует некоторых дополнений. Постулаты термодинамики сформулированы для системы отсчета, в которой термодинамическая система покоится как целое. Поэтому внутренняя энергия, изменение которой рассматривается, включает лишь среднюю энергию хаотического движения

$$\delta q = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho .$$

В нашем случае газ движется с некоторой скоростью, поэтому мы рассмотрим изменение не внутренней энергии, а полной. На основании теоремы Кенига она равна сумме энергии движения «центра масс» и энергии движения относительно центра масс, т. е. внутренней энергии (после усреднения).

При адиабатическом процессе изменение полной энергии в выделенном объеме происходит за счет переноса энергии потоком через границу объема и за счет работы сил давления, действующих на границе. В рассматриваемом случае это дает уравнение:

$$\rho_2 u_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) - \rho_1 u_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) = p_1 u_1 - p_2 u_2 .$$

Это уравнение с учетом с уравнения непрерывности приводит к уравнению Бернулли, в которое входит энтальпия системы $w = e + p/\rho$:

$$w_2 + \frac{u_2^2}{2} = w_1 + \frac{u_1^2}{2} .$$

Вместе с уравнениями состояния идеального газа (Клапейрона-Менделеева) $p = (\gamma - 1)\rho e$ и $e = c_V T$ система является полной системой уравнений, описывающей разрывное течение газа.

Исключая из этой системы скорости потока, можно получить соотношение, связывающее плотность и давление газа по обе стороны от разрыва:

$$e_1 - e_2 + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(p_1 + p_2)}{2\rho_1\rho_2} = 0$$

В последнем соотношении не использованы предположения о термодинамических характеристиках газа (его идеальности) и оно позволяет определить давление газа после прохождения разрыва как функцию его плотности. Такая зависимость называется ударной адиабатой или адиабатой Гюгонио. В отличие от рассматривавшейся ранее адиабаты Пуассона $p_2 = p_1(\rho_2/\rho_1)^\gamma$, давление в ударной адиабате зависит не только от плотности газа после разрыва, но и от начальных характеристик $p_1$ и $\rho_1$. Для модели идеального газа эта зависимость имеет вид:

$$p_2 = p_1 \frac{(\gamma+1)z-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)z},$$

где $z = \rho_2/\rho_1$ – отношение плотностей газа. На рисунке изображены адиабата Пуассона и Гюгонио.

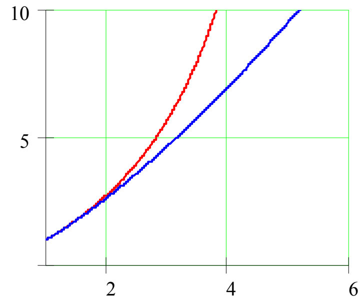


Рис.
Адиабата Пуассона (пунктир) и Гюгонио (сплошная)

При заданном начальном состоянии газа перед скачком задание лишь одного параметра после скачка, например $\rho_2$, определяет давление газа, а следовательно, и всех остальных его параметров. Очевидно, что плотность газа не может быть сколь угодно большой. Максимальное значение плотности $\rho_{max} = \rho_1 \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}$. Для идеального одноатомного газа $\gamma = c_p/c_V = 5/3$, так что $z_{max} = 4$, а для воздуха $z_{max} = 6$.

Отношение температур до и после разрыва $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{p_2}{p_1}\dfrac{1}{z}$.

Как отмечалось выше, прохождение газом поверхности разрыва является неравновесным процессом. Установление термодинамического равновесия должно приводить к росту энтропии газа. Вычислим изменение удельной энтропии, воспользовавшись соотношением (4) для идеального газа

$$s = c_V \ln\left(p/\rho^\gamma\right).$$

Подставляя сюда значения давления, получим для изменения энтропии:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_V \ln\left(\frac{(\gamma+1)z-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)z}\cdot\frac{1}{z^\gamma}\right).$$

Рост энтропии в системе возможен лишь при условии $z = \rho_2/\rho_1 > 1$, когда $u_2 < u_1$, т. е. при торможении газа в ударной волне. Это условие определяет направление процессов при разрывном течении газа. Скорости потока до и после разрыва можно выразить через соответствующие скорости звука. При заданном отношении давлений они определяется выражениями:

$$u_1 = c_1 \frac{\sqrt{2z}}{\sqrt{(\gamma+1)-(\gamma-1)z}}, \qquad u_2 = c_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\gamma+1)z-(\gamma-1)}},$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ и $c_2 = \sqrt{\gamma p_2/\rho_2}$ – скорости звука в потоке слева и справа от разрыва.

Как следует из приведенных соотношений $u_1 > c_1$, а $u_2 < c_2$, причем $u_2 = u_1/x < u_1$. Таким образом, поток газа, втекающий в ударную волну, имеет сверхзвуковую скорость, а поток затормозившегося газа – дозвуковую.