

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ "МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД"

(5 курс 1 поток)

1. Определить силу, с которой несжимаемая жидкость действует на погруженное в нее неподвижное тело (закон Архимеда).

2. Найти соотношение между скоростями и давлениями при стационарном течении несжимаемой идеальной жидкости в горизонтально расположенной трубке переменного сечения.

3. Доказать, что в отсутствие объемных сил при установившемся движении сила, действующая на данный объем идеальной жидкости, равна потоку импульса через его поверхность.

4. Доказать, что в отсутствие объемных сил при установившемся движении момент сил, действующих на данный объем идеальной жидкости, равен потоку момента импульса через его поверхность.

5. Косой удар струи: определить силу и момент, с которой струя идеальной несжимаемой жидкости действует на плоскую пластинку. Угол падения струи α , плотность жидкости ρ , начальная скорость струи v_0 , внешнее давление p_0 , движение плоское.

4. Открытый тяжелый колпак в виде усеченного кругового конуса с углом α при основании и радиусом основания R стоит на горизонтальной плоскости. Каков должен быть вес колпака G , чтобы он смог удержать воду, налитую внутрь него до высоты H ? Всюду вне колпака давление атмосферное.

6. Простейшим способом определения глубины покоящейся жидкости в сосуде является опускание до его дна плоской линейки и измерение длины ее смоченной части. Определить относительную погрешность при этом способе измерения. Угол смачивания считать известным.

7. Найти значения температуры, плотности и давления в критической точке неподвижного тела (точке на поверхности обтекаемого тела, где скорость потока равна нулю), помещенного в стационарный поток идеального сжимаемого газа. Скорость, плотность и температура на бесконечности равны $v_\infty, \rho_\infty, T_\infty$.

8. Стационарный поток идеального газа, скорость которого на бесконечности равна v_∞ , обтекает неподвижное тело. В некоторой точке на поверхности обтекаемого

тела, где скорость потока равна нулю, плотность и температура газа равны соответственно ρ_0 и T_0 . Найти значения температуры, плотности и давления на бесконечности.

9. Написать уравнение механического равновесия газообразной звезды плотности ρ , части которой удерживаются силами гравитационного притяжения. Учесть, что гравитационный потенциал U удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi G\rho$, где G - гравитационная постоянная. Найти распределение давления в звезде и ее радиус, если масса звезды равна M , а уравнение состояния имеет вид: а) $\rho = \rho_0 = const$ б) $p = C\rho^{1/2}$. Давление в центре звезды считать конечным, вне звезды - равным нулю.

10. Пусть имеется закрытый покоящийся сосуд, целиком заполненный неоднородной ($\rho \neq const$) идеальной несжимаемой жидкостью. Жидкость находится в равновесии в поле тяжести. Показать, что, если начать двигать сосуд горизонтально с ускорением, в сосуде возникнет непотенциальное движение жидкости относительно его стенок. Рассмотреть также случай однородной жидкости.

11. Показателем времени в водяных часах служит высота уровня в верхнем сосуде, которая должна уменьшаться равномерно с постоянной скоростью. Определить форму сосуда, употребляемую для водяных часов.

12. Из идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиуса a_0 . Получить уравнение, определяющее закон движения границы полости. Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью. Плотность жидкости и ненулевое давление на бесконечности считать известным.

13. Найти распределение скорости идеальной жидкости вокруг шара радиуса R , центр которого движется со скоростью $u(t)$ в первоначально покоившейся идеальной несжимаемой жидкости.

14. Найти силу сопротивления, действующую на шар радиуса R в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ , если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.

15. Шар радиуса R и массы M совершает одномерные колебания в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ под действием пружины жесткости k . Найти

частоту колебаний.

16. Частота колебаний тяжелого шарика (плотность материала ρ_0), соединенного с пружиной, в воздухе равна ω_0 . Как изменится эта частота, если осциллятор поместить в идеальную жидкость с плотностью ρ_1 .

17. Определить период колебаний математического маятника (маленькая сфера из материала с плотностью ρ_1 на нити длиной l), помещенного в идеальную несжимаемую жидкость с плотностью $\rho_0 < \rho_1$.

18. Найти подъемную силу, действующую на единицу длины цилиндра радиуса R , движущегося со скоростью $u(t)$ в первоначально покоившейся идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ , если циркуляция скорости по контуру, охватывающему цилиндр, равна Γ . Течение плоское.

19. Найти закон дисперсии гравитационных волн, распространяющихся в несжимаемой идеальной жидкости плотности ρ , находящейся в бассейне глубины h . Ускорение свободного падения g .

20. Определить закон дисперсии гравитационных волн, распространяющихся вдоль границы раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей, имеющих плотности ρ_1 и ρ_2 и находящихся в поле тяжести \vec{g} .

21. Вычислить энергию и импульс монохроматической гравитационной волны $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$ на свободной поверхности глубокой жидкости.

22. По поверхности жидкости распространяется квазимонохроматический пакет гравитационных поверхностных волн, содержащий $N(N \gg 1)$ горбов и впадин. Сколько колебаний вверх-вниз совершит находящийся на поверхности легкий поплавочек при прохождении этого волнового пакета?

23. При возмущении поверхности находящейся в поле тяжести жидкости точечным источником от места возмущения начинают расходиться в виде кругов гравитационные волны, заполняющие круг радиусом $R(t)$. Найти $R(t)$.

24. Найти интенсивность звуковых волн, излучаемых шаром в идеальной жидкости, если радиус шара меняется со временем по закону $R(t) = R_0 + a \cos(\omega t)$. Плотность покоящейся жидкости ρ , скорость звука в ней c , причем $a \ll R_0 \ll c/\omega$.

25. Найти интенсивность звуковых волн, излучаемых шаром радиуса R в идеаль-

ной жидкости, если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$. Плотность покоящейся жидкости ρ , скорость звука в ней c , причем $|u_0|/\omega \ll R \ll c/\omega$.

26. Найти частоты собственных колебаний идеального газа с постоянной теплоемкостью, помещенного в замкнутый цилиндр, расположенный вертикально в поле тяжести g . Длина цилиндра L , газ движется параллельно оси цилиндра. Молярная масса газа μ , показатель адиабаты γ , температура равновесного газа T_0 .

27. Найти частоты собственных изотермических колебаний идеального газа, помещенного в замкнутый цилиндр, расположенный вертикально в поле тяжести g . Длина цилиндра L , газ движется параллельно оси цилиндра. Молярная масса газа μ , температура T .

28. Найти декремент затухания малых радиальных колебаний пузыря воздуха в идеальной неограниченной жидкости плотности ρ , связанный с излучением пузырем звуковых волн. В состоянии покоя радиус пузыря R_0 , давление в жидкости p_0 . Воздух считать идеальным газом с постоянной теплоемкостью (показатель адиабаты γ), а его распределение в пузыре однородным. Скорость звука в жидкости c , причем $c^2 \gg p_0/\rho$.

29. Большой бак с идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 совершает колебания с амплитудой A . Внутри бака находится маленький шарик из материала с плотностью ρ_1 . Найти амплитуду колебаний шарика. Внешние силы отсутствуют.

30. Монохроматическая звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с плотностью ρ_1 со скоростью c_1 , отражается по нормали от границы раздела с другой жидкостью, имеющей плотность ρ_2 и скорость звука c_2 . Найти среднее давление на единицу площади границы, если средняя плотность потока энергии в падающей волне равна q_1 .

31. Монохроматическая звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с плотностью ρ_1 со скоростью c_1 , отражается по нормали от границы раздела с другой жидкостью, имеющей плотность ρ_2 и скорость звука c_2 . Найти среднее давление на единицу площади границы, если средняя плотность потока энергии в падающей волне равна q_1 .

32. Найти поля давления и скорости при стационарном движении несжимаемой

вязкой жидкости между параллельными плоскостями, одна из которых неподвижна, а другая движется со скоростью V . Расстояние между плоскостями d , объемные силы отсутствуют.

33. То же, если плоскости неподвижны и при наличии постоянного перепада давления Δp .

34. Несжимаемая вязкая жидкость течет по цилиндрической трубе радиуса R . Считая, что поток стационарен, перепад давления задан и объемные силы отсутствуют, найти поля давления, скорости и касательную составляющую силы, приложенной к единице длины трубы.

35. Найти силу, с которой стационарный поток несжимаемой вязкой жидкости действует на неподвижную сферу радиуса R . Скорость потока на бесконечности V , число Рейнольдса мало.

36. Вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ заполняет полупространство, ограниченное плоской бесконечной пластиной. Определить движение жидкости, если пластина колеблется в своей плоскости со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$. Кинематическая вязкость жидкости ν . Найти среднюю энергию, диссипируемую в единицу времени на единицу площади поверхности.

37. Покоящаяся вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство, ограниченное плоской бесконечной пластиной. Определить движение жидкости, если в некоторый момент времени пластина начинает двигаться в своей плоскости с постоянной скоростью u . Кинематическая вязкость жидкости ν . Найти силу сопротивления, действующую на единицу площади поверхности пластины.

38. Найти среднюю энергию, диссипируемую в единицу времени при движении шара радиуса R в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ , если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$, причем $\nu/\omega \ll R^2$, где ν есть кинематическая вязкость жидкости.

39. На слое вязкой жидкости толщиной h плавает пластина, масса единицы площади которой μ . Дно кюветы совершает малые колебания в своей плоскости с амплитудой A частотой ω . Найти амплитуду колебаний пластины.

40. Найти силу трения, действующую на шар радиуса R в вязкой несжимаемой

жидкости плотности ρ , если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$, причем $\nu/\omega \ll R^2$, где ν есть кинематическая вязкость жидкости.

41. Бесконечный цилиндр радиуса R вращается в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с постоянной угловой скоростью Ω . Найти момент силы трения, действующий на единицу длины цилиндра. Динамическая вязкость жидкости η .

42. Найти декремент затухания гравитационных волн длины λ , распространяющихся в бесконечно глубокой несжимаемой жидкости вязкости ν .

43. Определить распределение температуры при установившемся пуазейлевом течении вязкой жидкости в трубе радиуса R и длины $L \gg R$, если ее поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0 . Динамическая вязкость жидкости η и ее теплопроводность κ не зависят от температуры. Разность давлений на концах трубы Δp .

44. Определить распределение температуры при установившемся пуазейлевом течении вязкой жидкости в трубе радиуса R и длины $L \gg R$, температура которой $T(R, x) = T_0 x$. Динамическая вязкость жидкости η , ее теплопроводность κ , разность давлений на концах трубы Δp .

45. Бесконечный цилиндр радиуса R вращается в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с постоянной угловой скоростью Ω . Определить установившееся распределение температуры в жидкости, если поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре T_0 . Динамическая вязкость жидкости η и ее теплопроводность κ не зависят от температуры.

46. Найти установившуюся скорость всплывания невесомого цилиндра радиуса R и длины $L \gg R$ в соосном с ним цилиндрическом колодце, расположенном вертикально в поле тяжести g и заполненном несжимаемой вязкой жидкостью плотности ρ . Радиус колодца равен $R + h$, $h \ll R$, кинематическая вязкость жидкости ν .

47. Найти частоту и декремент малых радиальных колебаний пузыря воздуха в несжимаемой неограниченной жидкости с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν . Средний радиус пузыря R_0 , давление в жидкости на бесконечности p_0 . Воздух считать идеальным газом с постоянной теплоемкостью (показатель адиабаты γ), а его распределение в пузыре однородным.

48. В слое вязкой жидкости, толщина которого h , плавает пластина, масса единицы площади которой равна μ . Дно совершает колебания в своей плоскости с амплитудой A и частотой ω . Найти амплитуду колебаний пластины.

49. Определить частоту и декремент затухания малых радиальных колебаний пузырька газа радиусом R (показатель адиабаты γ), находящегося в вязкой несжимаемой жидкости с давлением p_0 , плотностью ρ_0 и вязкостью η .

50. Плоское дно бесконечно глубокой вязкой жидкости приводится в движение со скоростью $v = v_0 \cos \omega t$. Найти среднюю мощность, необходимую для поддержания этих колебаний. Плотность жидкости ρ , кинематическая вязкость ν .

51. Найти декремент затухания звуковых волн в идеальном газе при учете теплопроводности. Молекулярный вес газа — μ , показатель адиабаты — γ , коэффициент теплопроводности — κ .

52. В точке M неограниченного пространства, заполненного покоящейся жидкостью, происходит взрыв — мгновенно выделяется и передается жидкости кинетическая энергия E_0 . Определить возникшее движение жидкости, считая ее линейно-вязкой. Сжимаемостью жидкости, силой тяжести и величиной давления на больших расстояниях от точки M пренебречь.

53. Два круглых соосно расположенных диска одинакового радиуса R погружены в вязкую жидкость и медленно сближаются с относительной скоростью $2u$. Определить испытываемое дисками сопротивление, когда расстояние $2h$ между ними мало.

54. Оценить порядок величины изменения скорости элемента турбулентной жидкости за время τ много меньшее характерного времени движения жидкости L/V .

55. Найти закон изменения расстояния между двумя близкими элементами жидкости при их турбулентном движении.

56. В трубе радиуса R и длиной L стационарное течение несжимаемой жидкости с плотностью ρ и вязкостью η создается перепадом давления Δp . Найти расход жидкости в трубе при малых, когда течение ламинарно, и при больших, т.е. в режиме развитой турбулентности, перепадах давления.

57. Дать оценку пространственного масштаба движений, в которых происходит вязкая диссипация энергии, для основного сечения трубы в рассмотренном в преды-

дущей задаче турбулентном режиме.

58. Оценить поток тепла в нагреваемой снизу жидкости, когда число Рэлея R значительно превышает пороговое значение $R_{кр}$.